Cálculo II

Examen XVII

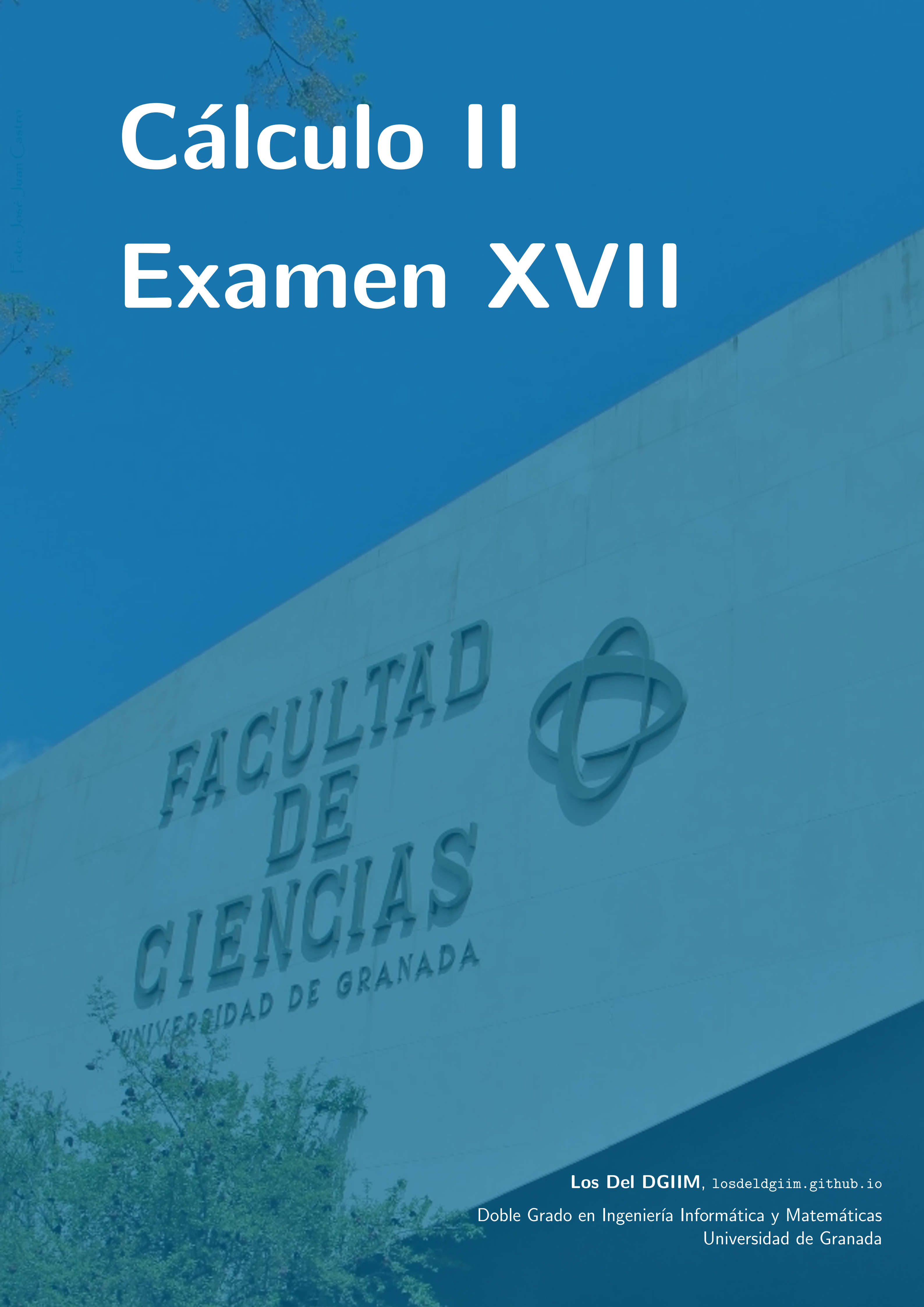

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II
Examen XVII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Roxana Acedo Parra

Granada, 2025

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Luis Gámez Ruiz[1].

Fecha 1 de julio de 2025.

Duración 3 horas.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

[1] El examen lo puso el departamento.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Tema a desarrollar: Seno y coseno como series de potencias.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$ con $g(0) = 0$, tal que $\exists g''(0)$. Estudia la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x \frac{g(t)}{t}\, dt}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ \\ g'(0), & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Nota: En el enunciado se afirma que g es dos veces derivable en 0 pero no necesariamente tiene que ser dos veces derivable en los $x \neq 0$.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Sea $q \in \mathbb{N}$.

a) Demuestra que, para $x \in [0, 1]$, se cumple que

$$\int_0^x \frac{1}{1 + t^q}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{qn+1}}{qn + 1}.$$

b) Calcula $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{qn + 1}$, para $q = 1$, $q = 2$, y $q = 3$.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$, para $x \in \mathbb{R}$. Calcula una aproximación de $F(1/2)$ con $|\text{error}|$ menor que 10^{-1}.

Ejercicio 5 (2 puntos)**.** Demuestra que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se verifica que

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\tan(x)} \frac{t}{1 + t^2}\, dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\tan(x)}} \frac{1}{t(1 + t^2)}\, dt = 1$$

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Tema a desarrollar: Seno y coseno como series de potencias.

La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ representará al $\text{sen}(x)$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ al $\cos(x)$ en este desarrollo. Consecuentemente deberán cumplir las siguientes condiciones para poder construir las series de pontencias centradas en 0 acertadas:

1. $f(0) = 0$.
2. $f'(x) = g(x)$.
3. $g(0) = 1$.
4. $g'(x) = -f(x)$.

La serie de potencias que converge a $f(x)$ será

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x-0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$$

y la que converge a $g(x)$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \cdot (x-0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \cdot x^n$$

Gracias a la primera y tercera condición ya sabemos que $a_0 = 0$ y $b_0 = 1$. Derivando ambas series término a término tenemos que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} \underset{m=n-1}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m+1} \cdot (m+1) \cdot x^m$$

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cdot n \cdot x^{n-1} \underset{m=n-1}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} b_{m+1} \cdot (m+1) \cdot x^m$$

Ahora igualamos término a término siguiendo la segunda condición

$$a_{m+1} \cdot (m+1) = b_m$$

y la cuarta

$$b_{m+1} \cdot (m+1) = -a_m$$

Realizando los cálculos convenientes, nos queda que:

- $a_{m+2} \cdot (m+2) \cdot (m+1) = -a_m$
- $b_{m+2} \cdot (m+2) \cdot (m+1) = -b_m$

Desarrollando unos cuantos términos de la serie de $f(x)$

$$a_0 = 0,\ a_1 = \frac{b_0}{0+1} = 1,\ a_2 = 0,$$

$$a_3 = \frac{-a_1}{(1+1)\cdot(1+2)} = \frac{-1}{3!},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{-a_3}{(3+1)\cdot(3+2)} = \frac{1}{5!}\ \dots$$

es más sencillo ver cómo únicamente aparecen los términos impares y estos van cambiando de signo, por ello podemos reescribir la serie de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Para reescribir la de $g(x)$ es más sencillo derivar la de $f(x)$, sin embargo desarrollaremos también los 6 primeros términos.

$$b_0 = 1,\ b_1 = \frac{-a_0}{0+1} = 0,\ b_2 = \frac{-b_0}{(0+1)\cdot(0+2)} = \frac{-1}{2!},$$

$$b_3 = 0,\ b_4 = \frac{-b_2}{(2+1)\cdot(2+2)} = \frac{1}{4!},\ b_5 = 0\ \dots$$

Confirmamos así que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

Calculemos ahora sus radios de convergencia.

- De $f(x)$:

$$\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} = \left\{\frac{\frac{1}{(2n+3)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}\right\} = \left\{\frac{1}{(2n+3)\cdot(2n+2)}\right\} \longrightarrow 0$$

  Al ser $L = 0 \Rightarrow R = \infty \ \wedge\ I_c = \mathbb{R}$ y es una serie analítica.

- De $g(x)$:

$$\left\{\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}\right\} = \left\{\frac{\frac{1}{(2n+2)!}}{\frac{1}{(2n)!}}\right\} = \left\{\frac{1}{(2n+2)\cdot(2n+1)}\right\} \longrightarrow 0$$

  Al ser $L = 0 \Rightarrow R = \infty \ \wedge\ I_c = \mathbb{R}$ y es una serie analítica.

Por último podemos demostrar que $\cos(x)^2 + \operatorname{sen}(x)^2 = 1$ haciendo uso de $f(x)$ y $g(x)$. Llamamos $h(x) = f(x)^2 + g(x)^2$, derivándola

$$h'(x) = 2\cdot f(x)\cdot f'(x) + 2\cdot g(x)\cdot g'(x) \underset{\text{usando 2 y 4}}{=} 2\cdot f(x)\cdot g(x) - 2\cdot g(x)\cdot f(x) = 0$$

Por lo tanto, al ser su derivada nula, $h(x)$ es constante. Evaluándola en $x = 0$

$$h(0) = f(0)^2 + g(0)^2 = 0^2 + 1^2 = 1 \Rightarrow f(x)^2 + g(x)^2 = 1$$

ya lo habríamos demostrado.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$ con $g(0) = 0$, tal que $\exists g''(0)$. Estudia la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x \frac{g(t)}{t}\,dt}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ \\ g'(0), & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Nota: En el enunciado se afirma que g es dos veces derivable en 0 pero no necesariamente tiene que ser dos veces derivable en los $x \neq 0$.

Antes de ver si es derivable, conviene ver si es continua, puesto que si no es continua no será derivable. Para ello debemos calcular los límites laterales, ver que coinciden entre ellos y que son iguales que el propio valor de la función en $x = 0$.

Además, debido al T.F.C. sabemos que $\exists H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, H'(t) = \dfrac{g(t)}{t}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \frac{g(t)}{t}\,dt}{x} \underset{\text{Aplicamos L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{H'(x)}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x}$$

$$\underset{\text{Como } g(0)=0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \underset{g \text{ derivable en } 0}{=} g'(0) = f(0)$$

El límite lateral izquierdo se calcula exactamente igual.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\int_0^x \frac{g(t)}{t}\,dt}{x} \underset{\text{Aplicamos L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{H'(x)}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x}$$

$$\underset{\text{Como } g(0)=0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \underset{g \text{ derivable en } 0}{=} g'(0) = f(0)$$

Por ende son iguales y la función $f(x)$ es continua. Veamos si es derivable.

Para que sea derivable en 0, necesitamos que sus derivadas laterales en 0 sean iguales. Derivemos la función:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{H'(x) \cdot x - H(x) \cdot 1}{x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0, \ {\scriptstyle g'(0) \text{ es una constante}} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Siendo las derivadas laterales

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{H'(x) \cdot x - H(x) \cdot 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{H'(x)}{x} - \frac{H(x) \cdot 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x^2} - \frac{H(x) \cdot 1}{x^2}$$

Les aplicamos L'Hôpital por separado y si los límites existen los restamos entre ellos.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x^2} \underset{\text{Aplicamos L'Hôpital dos veces}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{g''(x)}{2}$$

$$\text{Como } \exists g''(0) \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{g''(0)}{2}$$

Para el otro

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{H(x)}{x^2} \underset{\text{Aplicamos L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{H'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{2x^2} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{g''(0)}{4}$$

Consecuentemente,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x^2} - \frac{H(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{g''(0)}{2} - \frac{g''(0)}{4} = \frac{g''(0)}{4}$$

El procedimiento para calcular la derivada lateral izquierda es exactamente el mismo (no ha llegado a afectar que la estuviésemos haciendo por la derecha en ningún momento) y tiene el mismo valor. Como existen todas la derivadas laterales que tienen sentido y son iguales entre sí, entonces $f(x)$ es derivable en 0 y por ende en todo su dominio.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Sea $q \in \mathbb{N}$.

a) Demuestra que, para $x \in [0,1]$, se cumple que

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^q}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{qn+1}}{qn+1}.$$

Antes de nada, recordemos la serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \Leftrightarrow |r| < 1.$$

Podemos crear una función

$$h(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^q}\,dt - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{qn+1}}{qn+1}$$

y demostrar que es constante ($h'(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$) con valor 0. Derivemos por un lado la integral y por el otro la serie.

- Por el T.F.C. podemos derivar la integral, siendo su derivada:

$$\frac{1}{1+x^q}$$

- Ahora derivamos término a término de la serie (el radio de convergencia no cambia):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-x^q)^n = \frac{1}{1+x^q}$$

(y el resultado también vale en $t = 1$ por convergencia uniforme si $q \in \mathbb{N}$).

Es sencillo ver que $h'(x) = 0$, evaluémosla en $x = 0$,

$$h(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^q}\, dt - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 0^{qn+1}}{qn+1} = 0 \Longrightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t^q}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{qn+1}}{qn+1}.$$

Y queda demostrado el enunciado.

b) Calcula $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{qn+1}$, para $q = 1$, $q = 2$, y $q = 3$.
Usamos el resultado de la parte anterior con $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{qn+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^q}\, dt$$

- Para $q = 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = \ln(2) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$$

- Para $q = 2$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

- Para $q = 3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\, dt$$

En este caso la integral no es inmediata. Para resolverla seguiremos la integración de cocientes.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}\, dt = \int_0^1 \frac{A}{(t+1)} + \frac{Bt+C}{(t^2-t+1)}\, dt$$

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B = 0 & (t^2) \\ -A + B + C = 0 & (t) \\ A + C = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{-1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}$$

Ya sabemos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\frac{1}{3}}{(t+1)}\, dt = \left[\frac{1}{3} \cdot \ln(t+1)\right]_0^1$, sigamos con el otro trozo.

$$\int_0^1 \frac{\frac{-1}{3}t + \frac{2}{3}}{(t^2-t+1)}\, dt = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{-t+2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{(t^2-t+1)}\, dt =$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{-t+\frac{1}{2}}{(t^2-t+1)}\, dt + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\frac{3}{2}}{(t^2-t+1)}\, dt$$

Enfocándonos en $\displaystyle\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{-t+\frac{1}{2}}{(t^2-t+1)}\,dt$ tenemos que su integral es

$$\frac{-1}{3\cdot 2}\int_0^1 \frac{2t-1}{(t^2-t+1)}\,dt = \left[\frac{-1}{6}\cdot \ln(t^2-t+1)\right]_0^1$$

La integral del otro sumando sería:

$$\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\frac{3}{2}}{(t^2-t+1)}\,dt = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{2}\int_0^1 \frac{1}{(t^2-t+1)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4}+(t-\frac{1}{2})^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(t-\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}}}\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})^2}\,dt =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$$

En consecuencia la integral al completo es:

$$\left[\frac{1}{3}\cdot\ln(t+1) - \frac{1}{6}\cdot\ln(t^2-t+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\ln 2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{\ln 2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0{,}8356$$

Por tanto, tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0{,}8356$$

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Sea $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, para $x\in\mathbb{R}$. Calcula una aproximación de $F(1/2)$ con |error| menor que 10^{-1}.

Para resolver este ejercicio lo más sencillo es utilizar el polinomio de Taylor centrado en $a=0$ y $x=1/2$ ($T_n[F,0](1/2)$) y la fórmula del resto de Lagrange.

$$\exists c\in[0,1/2] : R_n[F,0](1/2) = \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

Derivemos varias veces $F(x)$ (es derivable por el T.F.C.) e intentemos acotar sus derivadas, teniendo en cuenta que el error estaría en valor absoluto.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= e^{-x^2}\\
F''(x) &= e^{-x^2}\cdot(-2x)\\
F'''(x) &= e^{-x^2}\cdot(-2+4x^2)\\
F''''(x) &= e^{-x^2}\cdot(12x-8x^3)\\
F'''''(x) &= e^{-x^2}\cdot(12-48x^2+16x^4)
\end{aligned}$$

Es sencillo ver que la primera y segunda derivadas están |acotadas| por 1, sin embargo la tercera ya no (por 2). Es algo más tedioso ver que la tercera, cuarta y quinta están |acotadas| por 12.

Probemos con $n = 2$, entonces sabemos que el valor absoluto de la tercera derivada en $[0, 1/2]$ es menor que 2. Haciendo uso de la fórmula del resto

$$\frac{2}{6 \cdot 8} < 10^{-1} \iff 1 < 2{,}4$$

De esta manera ya sabemos que

$$T_2[F, 0](x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \frac{F(0)}{0!} + \frac{F'(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{F''(0)}{2!} \cdot x^2 = 0 + x + 0$$

Evaluándolo en $x = 1/2$ tenemos

$$T_2[F, 0](1/2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ejercicio 5 (2 puntos)**.** Demuestra que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se verifica que

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\tan(x)} \frac{t}{1+t^2}\, dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\tan(x)}} \frac{1}{t(1+t^2)}\, dt = 1$$

Para resolver este ejercicio, llamaremos $h(x)$ a la suma de ambas integrales, derivaremos esta nueva función para comprobar que su derivada es nula. Posteriormente, usaremos el siguiente corolario.

Corolario 0.0.1. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Entonces:*

$$f \text{ es constante } \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Recordemos que es derivable gracias al T.F.C.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)^2} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{1}{\frac{1}{\tan(x)}(1 + \frac{1}{\tan(x)^2})} \cdot \frac{-1}{\tan(x)^2} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot \left(\frac{\tan(x)}{1+\tan(x)^2} - \frac{1}{\frac{1}{\cancel{\tan(x)}}(1 + \frac{1}{\tan(x)^2})} \cdot \frac{1}{\tan(x)^{\cancel{2}}}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot \left(\frac{\tan(x)}{1+\tan(x)^2} - \frac{1}{(\tan(x) + \frac{\cancel{\tan(x)}}{\tan(x)^{\cancel{2}}})}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot \left(\frac{\tan(x)}{1+\tan(x)^2} - \frac{1}{(\frac{\tan(x)^2}{\tan(x)} + \frac{1}{\tan(x)})}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot \left(\frac{\tan(x)}{1+\tan(x)^2} - \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)^2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Al haber comprobado que su derivada es nula, sólo nos queda evaluarla en un punto conveniente y fácil de calcular. Para ello lo más simple es elegir $x = \frac{\pi}{4}$ ya que $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ y así ambos extremos de las integrales serán iguales ($[a = \frac{1}{e}, b = 1]$).

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \int_{\frac{1}{e}}^{\tan(\frac{\pi}{4})} \frac{t}{1+t^2}\,dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{4})}} \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt = \\
&= \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{t}{1+t^2}\,dt + \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{t(1+t^2)}\,d = \\
&= \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{t}{1+t^2}\cdot\frac{t}{t} + \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt = \\
&= \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\cancel{1+t^2}}{t\cancel{(1+t^2)}}\,dt = [\ln(t)]_{e^{-1}}^{1} = 0 - (-1) = 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto queda el enunciado demostrado.